УДК 621.9;51.7

Н.Ю. Ламнауер, канд. техн. наук,
О.Г. Костюк, канд. техн. наук, Харків, Україна

ПРОГНОЗУВАННЯ ЯКОСТІ ВИРОБІВ МАШИНОБУДУВАННЯ ЗА ПАРАМЕТРОМ ЛІНІЙНОГО РОЗМІРУ

Для запропонованої чотирьохпараметричної моделі розподілу величини лінійного розміру виробів знайдені оцінки її параметрів з використанням порядкових статистик та сплайн-апроксимації для моди, що дає можливість прогнозування точності та знаходження величини, на яку необхідно налагоджувати верстат, для одержання виробів високої якості за цим параметром.

Для предложенной четырехпараметрической модели распределения величины линейного размера изделий найдены оценки её параметров с использованием порядковых статистик и сплайн-аппроксимации для моды, что дает возможность прогнозирования точности и нахождения величины, на которую необходимо настраивать станок, для получения изделий высокого качества по этому параметру.

For the proposed four-parameter model of the distribution of the value of the linear size of the products found estimation of parameters using order statistics and a spline- approximation for the mode that allows you to predict the accuracy and finding the value to which you want to configure the machine to produce high-quality products in this parameter.

Вступ. Прогнозування точності за параметром лінійного розміру є важливим розділом процесу створення кінцевого якісного продукту. Це прогнозування дає можливість рішення таких задач, як визначення раціонального рівня налагодження процесу виготовлення виробів. Тому задача прогнозування та знаходження величини розміру, на який налагоджується станок, стає все більш актуальною.

Постановка задачі. При вирішенні проблеми про прогнозування якості виробів машинобудування виникають наступні задачі:

1.Прогнозування частки браку за параметром лінійного розміру, що може бути виправленим, та невиправленого, для будь-якого станка та технології обробки.

2. Знаходження величини розміру, на який налагоджується даний станок, для отримання виробів з мінімумом браку чи без нього.

3.Визначення можливого запасу якості за величиною лінійного розміру в межах допуску та втрати можливої якості.

Аналіз останніх досліджень. ДСТУ та методики, які існують сьогодні, пропонують використовувати для визначення випадкової величини – розміру виробів, нормальний закон розподілу з використанням правила «3 сигм».

Хоча проф. А.А. Маталін показав, що для різних квалітетів точності закони розподілу лінійних розмірів мають й інші види. Закон нормального розподілу (Гауса) в більшості випадків стає справедливим при механічній обробці заготівок 8, 9, 10 и грубіших квалітетів; для заготівок з точністю 7, 8, 6 – закон Сімпсона, закон рівної ймовірності – 5, 6 та вище. Всі перелічені розподіли є симетричними відносно математичного сподівання [1].

В той же час всі підручники та посібники з технології машинобудування [2], говорять про те, що розподіли розмірів виробів несиметричні відносно середнього значення, тому робилися спроби створення несиметричних розподілів за допомогою композиції (суми) двох розподілів. Це робили вчені групи проф. Н.А. Бордачьова, що, в основному, приводило до двомодального розподілу. Запропонований проф. Н.А. Бордачьовим метод – композиції нормального та рівномірного закону зносу інструменту, дає випадкову величину розміру. Ця величина змінюється від $-\infty$ до $+\infty$ та має симетричний розподіл в будь-який момент часу [2]. Будь-які інші композиції законів в більшості випадків приводять до двомодального розподілу. Ці закони є не загальними, а такими, що мають коефіцієнт асиметрії та ексцес у вигляді констант. Дослідження величини розміру виробів показують, що при дотриманні встановленої технології обробки, розподіл розмірів – одномодальний, тобто має одну вершину.

Математична модель. Була запропонована чотирьохпараметрична модель розподілу, яка має вигляд [3], [4]:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \notin (b,c), \\ (1+k)\left[1-\left((x-a)/(b-a)\right)^{\frac{1}{k}}\right]/(c-b) & при \quad x \in [b,a], \\ (1+k)\left[1-\left((x-a)/(c-a)\right)^{\frac{1}{k}}\right]/(c-b) & при \quad x \in (a,c], \end{cases} \tag{1}$$

де a – модальне значення, b – нижня межа та c – верхня межа розміру, k – параметр форми кривої.

Для різних параметрів форми $0<k<1$ одержуємо різні, фізично більш адекватні, опуклі щільності розподілу. Якщо $k>1$, то одержуємо вогнуті щільності розподілу. При $k=1$ маємо трикутний розподіл. При малих k маємо розподіл, який близький до рівномірного, з межовими значеннями та з модою. Графіки функції щільності для різних параметрів форми наведені на рисунку 1.

Параметри a, b та c мають лінійний розмір, а параметр k – безрозмірний. Для оцінок параметрів бажано один розмірний параметр перевести у безрозмірний.

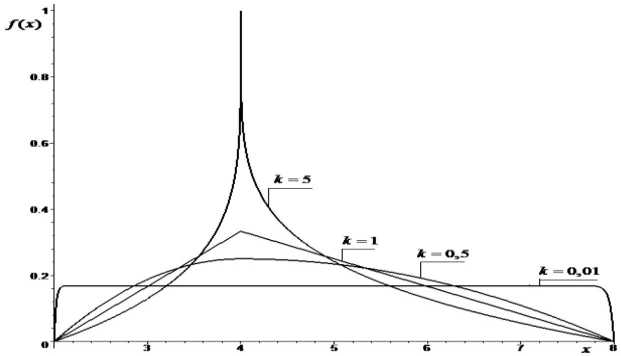

Рисунок 1 – Функції щільності розподілу розмірів (1)
при параметрах $a = 4$, $b = 2$, $c = 8$ та $k = 5$, $k = 1$, $k = 0,5$ та $k = 0,01$

Для оцінки параметрів даної моделі та для того, щоб центральні моменти виражалися через теоретичний розмах $c - b$, визначимо модальне значення a через безрозмірну величину, застосовуючи формулу ділення відрізка в заданому відношенні q : $q = (a - b) / (c - a)$.

Звідси одержуємо: $a = (b + cq) / (1 + q)$. (2)

В цьому випадку для моделі (1) квадрат асиметрії $\beta_1^2 = \mu_3^2 / \mu_2^3$ та ексцес $\beta_2 = \mu_4 / \mu_2^2$ визначається через k та q, де $\mu_j - j$-й центральний момент.

Поверхня квадрату асиметрії змінюється в межах від 0 до 0,8, а поверхня ексцесу – від 1,8 до 3. Аналіз даної моделі показав, що такі характеристики як квадрат асиметрії β_1^2 та ексцес β_2 повністю створюють таку ж площину, як і криві Пірсона [5], які мають різні розподіли. Звідси випливає, що побудована модель розподілу розмірів є загальною моделлю, яку необхідно застосовувати для кожного верстату та для будь-якої технології виготовлення.

Оцінки параметрів моделі розподілу розмірів. Модель стає робочою якщо будуть знайдені для неї хороші оцінки параметрів. При цьому треба враховувати, що для оцінки параметрів моделі повинна використовуватися вибірка невеликого об’єму, в зв’язку з технологічно припустимою кількістю деталей, що оброблюються.

Метод моментів, де прирівнюються емпіричні моменти до теоретичних моментів, дає оцінки параметрів моделі (1) [4], але ці оцінки малопридатні до

малої вибірки, тому що при малій вибірці виникають помилки в оцінці високих порядків центральних моментів.
Оцінки, одержані з використанням порядкових статистик, де відсутня міра безпорядку - ентропія, а, значить, використана вся інформація вибірки, дають кращі оцінки параметрів моделі (1).

Для моделі (1) теоретичні показники $\mathrm{R}_1 = (\boldsymbol{\mu}_{2:2} - \boldsymbol{\mu}_{1:2})^2 / \boldsymbol{\mu}_2 =$

$$= 4(2+2q^2+9k+9kq^2+13k^2+13k^2q^2+14k^2q+18kq+4q)^2(k+1)/(3(7k^2+$$
$$+2k^2q+7k^2q^2+4k+4kq^2+8kq+1+2q+q^2)(1+q)^2(2+3k)^2(1+3k)),$$

$$\mathrm{R}_2 = (M(X) - \boldsymbol{\mu}_{1:2})^2 / \boldsymbol{\mu}_2 = (2+2q^2+9k+9kq^2+13k^2+13k^2q^2+14k^2q+18kq+$$
$$+4q)(11k+2+11kq^2+2q^2+22k^2+22k^2q^2+13k^3+13k^3q^2+22kq+32k^2q+14k^3q+$$
$$+4q/(3(7k^2+2k^2q+7k^2q^2+4k+4kq^2+8kq+1+2q+q^2)(1+q)^2(2+3k)^2(1+3k)),$$

де $\boldsymbol{\mu}_{1:2}$ – математичне сподівання першої порядкової статистики вибірки об'єму два, а $\boldsymbol{\mu}_{2:2}$ – математичне сподівання другої порядкової статистики вибірки об'єм два.

Визначимо за вибіркою емпіричні показники $\tilde{R}_1 = (\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{2:2} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1:2})^2 / S^2(X)$ і $\tilde{R}_2 = (\bar{x} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1:2})^2 / S^2(X),$ де оцінки $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1:2}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{2:2}$ – математичні сподівання порядкових статистик вибірки об'єму два, беруться з виразів

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1:2} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i) x_{(i+1)}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{2:2} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-2} (1+i) x_{(i+2)},$$

де $x_{(i)}$ – i - а порядкова статистика вибірки об'єму n,

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – вибіркове середнє та $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$ – виправлена вибіркова дисперсія. Оцінки параметрів k, q одержують із рішення системи

$$\begin{cases} \mathrm{R}_1 = \tilde{R}_1 \\ \mathrm{R}_2 = \tilde{R}_2 \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) розв'язується в системі Maple.

Визначивши математичне сподівання $M(X)$ через q маємо

$$M(X) = (3kb + kbq + b + bq + 3kqc + kc + c + qc) / (2(1+q)(2k+1)) \tag{4}$$

Тоді, підставляючи в формулу (4) знайдені значення k та q, замінюючи $M(X)$ на вибіркове середнє $\bar{x}$, одержимо рівняння відносно параметрів c та b. Аналогічно, замінюючи в формулі $\boldsymbol{\mu}_2$ знайдені k та q, а також, замінюючи $\boldsymbol{\mu}_2$ на виправлену вибіркову дисперсію S^2, одержимо рівняння відносно параметрів c та b. Рішення даної системи дає оцінки параметрів c та b.

Так, наприклад, при змодельованих 10 значеннях з параметрами $k=0,4$; $q=0,6$; $b=0,2$; $c=2,6$; $a=1,1$ маємо за запропонованим методом: $\tilde{k}=0,41$; $\tilde{q}=0,57$; $\tilde{b}=0,207$; $\tilde{c}=2,580$; $\tilde{a}=1,069$.

Статистичне моделювання показало, що запропоновані оцінки більш наближені до оцінюваних параметрів та мають дисперсію меншу, ніж оцінки параметрів моделі, отримані методом моментів.

Можливе одержання інших оцінок параметрів моделі, наприклад, одержання оцінки моделі параметра a, використовуючи сплайн апроксимацію для її оцінки.

Оскільки параметр a є модою моделі (1), то для оцінки моди за дискретним рядом є варіанта, яка має найбільшу частоту. При обчисленні моди для інтервального варіаційного ряду необхідно спочатку визначити модальний інтервал (за максимальною частотою), а потім — значення модальної величини ознаки за формулою [7]:

$$\hat{a}=x_0+h(f_m-f_{m-1})/((f_m-f_{m-1})+(f_m-f_{m+1})) \qquad (5)$$

де: $\hat{a}$— значення моди, x_0 — нижня границя модального інтервалу, h — величина інтервалу, f_m — частота модального інтервалу, f_{m-1}— частота інтервалу, який є попереднім до модального, f_{m+1}— частота інтервалу, наступного за модальним.

Для проведення певних розрахунків інтервальний варіаційний ряд умовно замінюють дискретним. Тоді середнє значення інтервалу приймають в якості варіанти з частотою f_i $(\mathrm{i}=1..l)$, тобто одержуємо розподіл вибірки та для даного розподілу в системі Maple знаходимо точку максимуму $\tilde{a}$ апроксимованого сплайну [9].

Виконаний статистичний аналіз при об'ємі вибірки $n=20$, показав, що для моделі (1) з параметрами $a=4$, $b=2$, $c=8$ та $k=0,5$, оцінка параметра a $\tilde{a}$ ближча до істинної, ніж $\hat{a}$ оцінка, одержана із (5).

Теоретичний квадрат показника асиметрії Пірсона $\mathrm{E}_x^2=(M(X)-a)^2/\boldsymbol{\mu}_2$ для данной модели имеет вид:

$$\mathrm{E}_x^2=3(\mathrm{q}-1)^2(k+1)(3k+1)/(7k^2+2k^2q+7k^2q^2+4k+4kq^2+8kq+q^2+1+2q).$$

Визначивши $\tilde{a}$ та емпіричний квадрат показника асиметрії Пірсона $\tilde{E}_x^2=(\bar{x}-\tilde{a})^2/S^2(X)$ і прирівнявши його до E_x^2 можна одержати системи

$$\begin{cases} \mathrm{E}_x^2 = \tilde{E}_x^2, \\ R_1 = \tilde{R}_1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \mathrm{E}_x^2 = \tilde{E}_x^2, \\ R_2 = \tilde{R}_2 \end{cases}.$$

Системи дають однозначне рішення при $q > 0$ та $k > 0$, яке й є оцінками параметрів q та k.

Оцінки параметрів c та b знаходяться методом, згаданим вище.

Оцінки якості виробів машинобудування за параметром лінійного розміру. Будь-яка технологічна система виготовлення виробу повинна забезпечувати його якість. Одним з основних показників якості виробу є одержаний розмір цього виробу, який знаходиться чи не знаходиться в полі допуску. Поле допуску T розміру деталі, на який робиться настроювання, дорівнює різниці верхнього ei та нижнього es граничних відхилень:

$$T = es - ei.$$

Одержана різниця $c_i - b_i$ оцінок параметрів моделі (1) є оцінкою поля розсіювання розмірі виробів, а самі оцінки b_i та c_i визначають місце розташування відносно заданих значень ei та es. На рис. 2. подані розташування оцінок b_i та c_i.

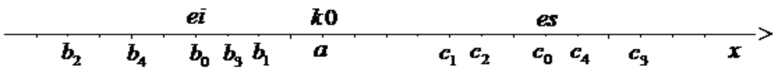

Рисунок 2 – Взаємне розташування оцінок b_i та c_i моделі (1)

Якщо $ei = b_0$ та $es = c_0$, то існує ідеальний випадок виготовлення виробів. Інтервал $(b_1; c_1)$ свідчить про те, що браку немає. Оцінки b_2 та c_2 свідчать про те, що є не усунений брак, ймовірність якого визначається за формулою:

$$P(b_2 < x \le ei) = ei - b_2 + k(ei - a)\left[1 - \left(\left(ei - a\right)/\left(b_2 - a\right)\right)^{\frac{1}{k}}\right].$$

Оцінки b_3 та c_3 дають усунений брак, ймовірність якого визначається за формулою:

$$P(es < x \le c_3) = c_3 - es - k(es - a)\left[1 - \left(\left(es - a\right)/\left(c_3 - a\right)\right)^{\frac{1}{k}}\right].$$

Інтервал $(b_4; c_4)$ свідчить про те, що є усунений та не усунений брак, ймовірність якого визначається за формулою:

$$P(es < x \le c_4) + P(b_4 < x \le ei) = c_4 - es - k(es-a)\left[1-\left((es-a)/(c_4-a)\right)^{\frac{1}{k}}\right] +$$

$$+ei - b_4 + k(ei-a)\left[1-\left((ei-a)/(b_4-a)\right)^{\frac{1}{k}}\right].$$

Знайдемо ймовірність влучення розміру виробу в інтервал $(z, \quad z+T)$ при умові, що модальне значення a лежить в полі допуску T. Із знайденої функції розподілу $F(x)$ маємо ймовірність влучення випадкової величини в інтервал
$(z, \quad z+T)$:

$$P(z < X < z+T) = \frac{1}{c-b}\left[T + k(z+T-a)\left(1-\left(\frac{z+T-a}{c-a}\right)^{\frac{1}{k}}\right) - k(z-a)\left(1-\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right]$$

Для цієї функції максимум ймовірності влучення розміру виробу в інтервал $(z, \quad z+T)$ дорівнює

$$z_{\max} = a-(a-b)T/(c-b).$$

Цей максимум не залежить від параметра форми k, тобто застосовується для будь-якого розподілу.

Звідси нижня та верхня межі настроювання інструменту з мінімальним браком має вигляд:

$$\varepsilon_н = a-(a-b)T/(c-b) \text{ та } \varepsilon_в = \varepsilon_н + T = a+(c-a)T/(c-b)$$

Застосовуючи (2) для визначення нижньої та верхньої межі настроювання інструменту з отриманням мінімального браку, маємо:

$$\varepsilon_н = a - Tq/(1+q) \quad \text{та} \quad \varepsilon_в = a + T/(1+q)$$

Звідси маємо, що $\varepsilon_н = (a-\varepsilon_н)/(\varepsilon_в - a) = q$, тобто при максимальній якості зберігається відношення ділення відрізка відносно моди a.

В окремому випадку, коли мода та медіана співпадають із середнім значенням, тобто $a=(b+c)/2$ чи $q=1$, маємо:

$$\varepsilon_н = a - T/2 \quad \text{та} \quad \varepsilon_в = a+T/2,$$

що раніше пропонувалося для настроювання станка.

Відсоток виробів на станку з максимально можливою якістю складає величину:

$$\Delta \cdot 100\% = P(\varepsilon_н < X < \varepsilon_в)\cdot 100\% = (T/(c-b))\left[1+k-k\left(T/(c-b)\right)^{\frac{1}{k}}\right]\cdot 100\%$$

та не залежить від величини моди a.

Звідси можливий запас якості за величиною лінійного розміру в межах допуску має вигляд:

$$(\Delta-1)\cdot 100\% = \left\{(T/(c-b))\left[1+k-k\left(T/(c-b)\right)^{\frac{1}{k}}\right]-1\right\}\cdot 100\%$$

Та втрата можливої якості має вигляд:

$$(1-\Delta)\cdot 100\% = \left\{1-(T/(c-b))\left[1+k-k\left(T/(c-b)\right)^{\frac{1}{k}}\right]\right\}\cdot 100\%.$$

Оскільки сума абсолютних відхилень випадкової величини від медіани є мінімальна величина [6], то настроювання будь-якого станка потрібно проводити на медіанну величину. В нашому випадку ця величина знаходиться з рішення рівняння:

$$\left\{x_m-b+k(x_m-a)\left[1-\left((x_m-a)/(b-a)\right)^{\frac{1}{k}}\right]\right\}/(c-b)=0.5 \text{ при } b<x_m\le a \qquad (6)$$

або

$$\left\{x_m-b+k(x_m-a)\left[1-\left((x_m-a)/(c-a)\right)^{\frac{1}{k}}\right]\right\}/(c-b)=0.5 \text{ при } a<x_m\le c. \qquad (7)$$

Це рішення знаходиться з отриманих оцінок параметрів a, b, c та k.

Так, наприклад, при $a=4$, $b=2$, $c=8$ та $k=0,5$ маємо $x_m=4,67302$ та $M(X)=4,75$.

За формулою Пірсона [7] маємо: $x_m \approx \frac{a}{2}+\frac{2}{3}M(X)=2+3,16667=5,16667$, що достатньо далеко від істинного значення. Тому користуватися цими формулами не слід.

Для великих вибірок можливо скористатися емпіричною оцінкою медіани. Для цього розташуємо отримані значення за порядком та знаходимо значення, що містяться в середині. Але застосувати велику вибірку ми не в змозі, тому що процес різання обмежений технологічно, інакше він стає неоднорідним по відношенню до початкового. Тому для настроювання станка за малою вибіркою застосовуються формули (6) та (7).

Висновки.

1. Для запропонованої моделі розподілу величини лінійного розміру виробу знайдені оцінки її параметрів за методом порядкових статистик та методом сплайн-апроксимації для моди.

2. Визначені нижня та верхня границі лінійного розміру виробів, у межах яких спостерігається максимальна кількість якісних виробів, що

дозволяє розрахувати можливий запас якості в межах допуску та втрати можливої якості досліджуваного параметру.

3. Запропоновано розрахункові формули для визначення величини, на яку необхідно настроювати станок з отриманням мінімальної кількості браку за параметром лінійного розміру виробу.

Перспективи подальшого розвитку. Дослідити знайдені оцінки параметрів моделі розподілу величин лінійних розмірів за запропонованими методами, що до їхньої ефективності, обґрунтованості та незміщеності.

Список використаних джерел: 1. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., исправл. и дополн. - М.: Физматлит, 2002.— 496 с . **2.** *Маталин А.А.* Технология машиностроения: Учебник для машиностроительных вузов по специальности «Технология, металлорежущие станки и инструменты». -Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1985. - 496 с. **3.** *Ламнауэр Н.Ю.* Распределение размеров изготовления идзелий Високі технології в машинобудуванні: збірник наукових праць. – Харків, НТУ «ХПІ», 2012. –Вип.1(22). – С.177-181. **4.** *Ламнауэр Н.Ю.* Модель распределения размеров изделий и ее применение для оценки точности обработки. Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012.-№27. – С.98-107. **5.** *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 416с. **6.** *Крамер Г.,* Математические методы статистики: Пер. с англ. / Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: «Мир». -1976. – 623 с. **7.** *Балиова В.С.* Статистика в вопросах и ответах: Учебное пособие. – М: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2004. -344 с. **8.** *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. – 316 с.

Надійшла до редколегії 19.11.2013